УДК 621.791.95

Кассов В. Д.
Малыгина С. В.
Грибков Э. П.
Данилюк В. А.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ ПОРОШКОВОЙ ЛЕНТЫ С УЧЁТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧКИ

При производстве порошковых лент необходимо обеспечить уплотнение сердечника, чтобы он не высыпался из оболочки, сохранение её прочности и геометрических размеров профиля. Основным недостатком существующих математических моделей [1, 2] процесса прокатки порошковой ленты является отсутствие учёта возможности пластической деформации монометаллической оболочки, что снижает точность определения таких результирующих параметров, как конечная плотность порошкового сердечника и его конечная толщина.

Цель работы – разработка математической модели прокатки порошковой ленты, которая бы учитывала помимо деформации порошкового сердечника и пластическую деформацию металлической оболочки.

В основу предлагаемой математической модели положено численное рекуррентное решение конечно-разностной формы условий статического равновесия каждого отдельного выделенного элементарного объема, полученных путем разбиения зоны пластического формоизменения на их конечное множество. Используемая в этом случае расчетная схема интегрального очага деформации представлена на рис. 1.

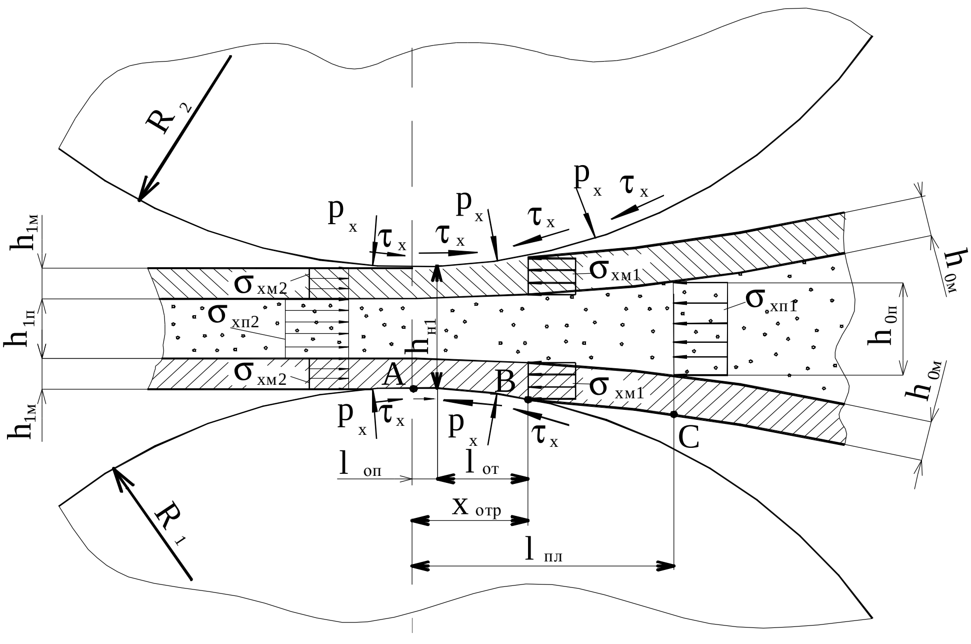

Рис. 1. Расчетная схема интегрального очага деформации

Текущие значения показателей, характеризующих, согласно закону Амонтона, условия трения на контакте порошковой и монометаллической составляющей $f_x = t_x/p_x$, а также между слоями $f_{xпм} = t_{xпм}/p_x$ (рис. 2), определяли с учетом реального характера их распределений по длине очага деформации:

$$f_x = t_x / p_x = f_{om}\left[\frac{x - l_{on}}{l_{пл} - l_{on}}\right]^{a_f} \quad \text{при} \quad l_{on} < x \le l_{пл}; \qquad (1)$$

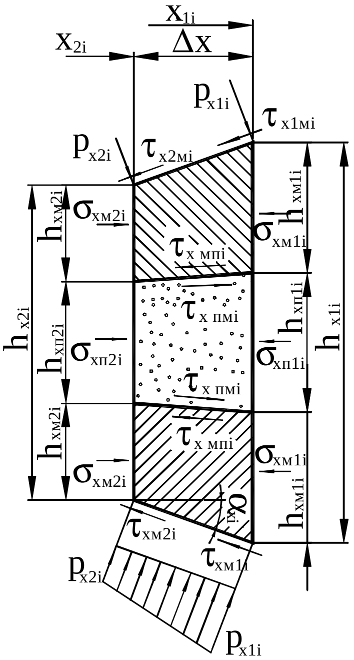

Рис. 2. Расчетная схема выделенного элементарного объема

$$f_x = t_x / p_x = -f_{on}\left[\frac{l_{on} - x}{l_{on}}\right]^{a_f} \quad \text{при} \quad 0 < x \le l_{on}\,; \qquad (2)$$

$$-f_{xп\,м} = f_{xмп} = -t_{xпм} / p_x = t_{xмп} / p_x = f_{0мп}\left[\frac{x}{l_{пл}}\right]^{a_{fп\,м}}, \qquad (3)$$

где f_{om}, f_{on}, $f_{0мп}$ – опорные значения, соответствующие значениям соответствующих коэффициентов трения в сечении на входе ($x = l_{пл}$) и в сечении на выходе ($x = 0$) из зоны уплотнения;

a_f, $a_{fпм}$ – степенные показатели, характеризующие форму эпюры распределения коэффициентов трения по длине очага деформации ($a_f = 0.2…0.5$);

$п$, $м$ – индексы, обозначающие порошковую и монометаллическую составляющие прокатываемой порошковой ленты;

l_{on} – протяженность зоны опережения.

При разработке математической модели был принят еще ряд следующих основных допущений:

- деформация полосы двухмерная и установившаяся во времени, при этом кинематика течения каждого из слоев подчиняется гипотезе плоских сечений;
- граничные сечения зон уплотнения и упругого восстановления вертикальны;
- текущие значения углов контакта a_{xi}, касательных межслойных (сдвиговых) $t_{xпмi}$ напряжений по длине каждого отдельного i-го выделенного элементарного объема не изменяются, в то время как изменения нормальных p_{xi} и касательных t_{xi}, $t_{xпмi}$ контактных напряжений носят линейный характер;
- показатели механических свойств, нормальные напряжения $\sigma_{xп(м)1(2)i}$, а также кинематические параметры процесса прокатки изменяются только по длине очага деформации, в то время как по толщине каждого отдельного сечения рассматриваемой составляющей их величина остается постоянной.

В случае прокатки композиции порошок – монометаллическая оболочка при отсутствии полученных предварительно межслойных связей скорости перемещения составляющих полосы в очаге деформации будут гарантировано эквивалентны только при условии произошедшей сварки давлением, а, следовательно, только в сечениях, близких к выходу из очага деформации: $V_{1п} = V_{1м} = V_1$, в то время как в остальных сечениях они будут несколько отличаться друг от друга: $V_{xп}$ ¹ $V_{xм}$ и $V_{0п}$ ¹ $V_{0м}$. Следовательно, кинематические $V_{xпi}$, $V_{xмi}$, а вместе с ними и геометрические $h_{xпi}$, $h_{xмi}$ параметры процесса прокатки в этом случае являются неизвестными и подлежат определению. Известными в этом случае являются только значения исходных толщин порошковой $h_{0п}$ и монометаллической $h_{0м}$ составляющих.

Согласно используемой рекуррентной форме решения, при которой компоненты $s_{xм1i}$, $s_{xп1i}$ и p_{x1i} являются известными исходя из результатов расчета предыдущего (i-1) элементарного объема. Полный расчет напряженно-деформированного состояния для i-го выделенного элементарного объема сводится к определению нормальных $s_{xп2i}$, $s_{xм2i}$ и нормальных контактных напряжений p_{x2i} на основе целенаправленного перебора толщин $h_{xп2i}$, $h_{xм2i}$, исходя из условия равновесия конечного граничного сечения:

$$p_{x2i} = p_{xп2i} = p_{xм2i}\,. \qquad (4)$$

С целью определения нормальных контактных напряжений p_{x2i} рассмотрим условия статического равновесия элементарного объема очага деформации, которые будут иметь вид:

– для монометаллической оболочки:

$$\sum F_{xм} = s_{xм2i}h_{xм2i} - s_{xм1i}h_{xм1i} - 0.5\Delta x\cdot\left(P_{x1i}f_{xм1i} + P_{xм2i}f_{xм2i}\right) - \\ -0.5\Delta x\left(P_{x1i}f_{xм\,n1i} + P_{x2mi}f_{xм\,n2i}\right) + \left(P_{x1i} + P_{xм2i}\right)\left(h_{xм1i} - h_{xм2i}\right)/2 = 0; \quad (5)$$

– для порошкового слоя:

$$\sum F_{xn} = s_{xn2i}h_{xn2i} - s_{xn1i}h_{xn1i} - \Delta x\left(P_{x1i}f_{xм\,n1i} + P_{xn2i}f_{xм\,n2i}\right) + \\ +\left(P_{x1i} + P_{x2ni}\right)\left(h_{xn1i} - h_{xn2i}\right)/2 = 0, \quad (6)$$

где за положительные значения нормальных напряжений s_x приняты напряжения сжатия, а направление действия касательных контактных $t_{xn(м)}$ и межслойных $t_{xnм}$ напряжений учтено знаками в функциональных описаниях (10)–(3).

Нормальные напряжения монометаллической составляющей $s_{x2м}$ будут подчинятся условию пластичности для сплошных сред, а именно:

$$s_x = P_x - 2K_x, \quad (7)$$

где $2K_x$ – коэффициент удвоенного сопротивления деформации сдвига, который можно определить по формуле:

$$2K_x = 1{,}155\left(a_0 + a_1 e_x + a_2 e_x^2 + a_3 e_x^3\right), \quad (8)$$

здесь a_0, a_1, a_2, a_3 – коэффициенты регрессии, характеризующие интенсивность деформационного упрочнения металла подложки;

e_x – относительная деформация монометаллической составляющей.

Подставив в уравнение (5) условие пластичности для сплошных сред (7) можно определить нормальные контактные напряжения, действующие в монометаллической составляющей на выходе из элементарного объема очага деформации:

$$P_{xм2i} = \left[2K_{xм2i}h_{xм2i} + s_{xм1i}h_{xм1i} + \frac{1}{2}P_{xм1i}f_{xм1i}\Delta x + \frac{1}{2}P_{xм1i}f_{xnмi}\Delta x - \right. \\ \left. -\frac{1}{2}P_{xм1i}\left(h_{xм1i} - h_{xм2i}\right)\right] / \left[\frac{1}{2}f_{xм2i}\Delta x - \frac{1}{2}f_{xnмi}\Delta x + \frac{1}{2}\left(h_{xм1i} + h_{xм2i}\right)\right]. \quad (9)$$

Нормальные напряжения s_{xn2i} можно выразить через соответствующие нормальные контактные напряжения p_{xn2i}, исходя из условия пластичности для сыпучих сред [3]:

$$p_{xn2i}^2 - 2\cdot\frac{1-2a_{xn2i}}{1+4a_{xn2i}}p_{xn2i}s_{xn2i} + s_{xn2i}^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1+a_{xn2i}}{1+4a_{xn2i}}b_{xn2i}s_{sxn2i}^2, \quad (10)$$

где a_{xn2i}, b_{xn2i} – текущие по длине очага деформации значения коэффициентов, учитывающих специфику деформации именно порошковой среды;

s_{sxn2i} – текущее значение предела текучести твердой фазы данной порошковой композиции.

Количественно значения коэффициентов a_{xn2i} и b_{xn2i} , согласно рекомендациям работы [3] могут быть определены как:

$$a_{xn2i} = a\left(1 - g_{x2i}\right)^m; \quad b_{xn2i} = g_{x2i}^{2n}, \quad (11)$$

где $g_{x2i} = r_{x2i}/r_0$ – текущее по длине очага деформации значение относительной плотности;

r_{x2i}, r_0 – текущая плотность и плотность твердой фазы данной порошковой композиции;

a, m, n – постоянные для каждого конкретного состава порошка значения коэффициентов, характеризующих интенсивность изменения a_{xn} и b_{xn} в зависимости от изменения показателя относительной плотности g_x.

Выразив из уравнения (10) величину нормальных напряжений и подставив его в уравнение статического равновесия (6) можно определить нормальные контактные напряжения:

$$p_{xn2i} = \frac{\sqrt{t_{1n}^2 t_{2n}^2 - \left(t_{1n}^2 - t_{3n}\right)\left(t_{2n}^2 - t_{4n}\right)} - t_{1n} t_{2n}}{t_{1n}^2 - t_{3n}}, \tag{12}$$

где $t_{1n} = \dfrac{1-2a_{xn2i}}{1+4a_{xn2i}} h_{xn2i} + \dfrac{1}{2}\left(h_{xn1i} - h_{xn2i} - 2 f_{xм\,n2i}\Delta x\right)$;

$t_{2n} = 0.5 p_{x1i}\left(h_{xn1i} - h_{xn2i} - 2 f_{xм\,ni}\Delta x\right) - s_{xn1i} h_{xn1i}$;

$$t_{3n} = h_{xn2i}^2\left[\left(\frac{1-2a_{xn2i}}{1+4a_{xn2i}}\right)^2 - 1\right]; \quad t_{4n} = \frac{4}{3} h_{xn2i}^2 \frac{1+a_{xn2i}}{1+4a_{xn2i}} b_{xn2i} s_{sxn2i}^2. \tag{13}$$

По мере определения P_{xn2i} и $P_{xм2i}$ конечную толщину h_{x2ni} определяли итерационно исходя из условия, как это было уже указано ранее, равенства нормальных контактных напряжений P_{xn2i} » $P_{xм2i}$:

$$h_{x2ni(k+1)} = h_{x2nik} - A_h \cdot sign\left\{p_{x2nik} - p_{x2мik}\right\}, \tag{14}$$

где в первом цикле k-ой итерационной процедуры, исходя из первоначального предположения о равенстве вытяжек, принимали $h_{xn2ik}\big|_{k=1} = h_{xn1i} h_{x2i} / h_{x1i}$;

A_h – шаг изменения толщины слоя, величина которого в зависимости от степени приближения к исходному результату была принята переменной;

$sign\{p_{xn2i} - p_{xм2i}\}$ – градиентная оценка направления следующего приращения.

Помимо определения текущих толщин составляющих порошковой ленты необходимо также определение текущего значения относительной плотности порошка. Для этого, воспользовавшись зависимостями между главными скоростями пластической деформации $\dot{e}_1, \dot{e}_3$ и главными напряжениями s_1, s_2, s_3 предоставляемыми теорией течения пористых материалов и исходя из условия сохранения массы, результирующее в рамках данного объема значение относительной плотности порошковой среды может быть определено как:

$$g_{x2i} = g_{x1i} h_{xn1i} / \left[h_{xn2i}\left(1 + e_{lxn2i}\right)\right], \tag{15}$$

где $e_{lxn2i} = \dfrac{s_{xn2i}\left(1+4a_{xn2i}\right) - p_{x2i}\left(1-2a_{xn2i}\right)}{p_{x2i}\left(1+4a_{xn2i}\right) - s_{xn2i}\left(1-2a_{xn2i}\right)} \cdot \dfrac{h_{xn1i} - h_{xn2i}}{h_{xn1i}}$.

В качестве векторной направленности используемой рекуррентной схемы решения принимали направление, соответствующее направлению движения прокатываемой композиции, а в качестве условий связи при переходе от i-го к (i + 1) элементарному объему использовали следующие условия:

$$\begin{gathered} x_{1(i+1)} = x_{2i};\, h_{x1(i+1)} = h_{x2i};\, h_{xn1(i+1)} = h_{xn2i};\, h_{xм1(i+1)} = h_{xм2i};\, f_{xм1(i+1)} = f_{xм2i}; \\ f_{xn\,м(i+1)} = f_{xn\,мi};\, g_{x1(i+1)} = g_{x2i};\, p_{x1(i+1)} \approx p_{xn2i} \approx p_{xм2i}; \\ s_{xn1(i+1)} = s_{xn2i};\, s_{xм1(i+1)} = s_{xм2i}, \end{gathered} \tag{16}$$

где начальные условия, т. е. геометрические и силовые характеристики для первого элементарного объема, соответствовали:

$$x_{1i|i=1}=l_{пл};\ h_{x1i|i=1}=h_0;\ h_{xп1i|i=1}=h_{0п};\ h_{xм1i|i=1}=h_{0м};\ f_{xм1i|i=1}=f_{оп};$$
$$f_{xп\,мi|i=1}=f_{0п\,м};\ g_{x1|i=1}=g_{x0};\ s_{xп1i|i=1}=s_{0п};\ s_{xм1i|i=1}=s_{0м};\ p_{x1i|i=1}=0, \qquad (17)$$

где $r_{ут}$ – плотность утряски порошковой среды.

Одной из основных отличительных черт процесса прокатки порошковых материалов на монометаллической подложке является наличие функциональной связи между общей протяженностью длины дуги контакта и толщиной монометалла. Довольно сложным в этом случае будет и характер распределения текущего значения толщины h_x, количественное описание которого, в первом приближении, можно представить как:

$$h_x=h_1+\Delta h_x, \qquad (18)$$

где Δh_x – текущее значение абсолютного обжатия порошковой композиции [1]:

$$\Delta h_{xп\,i}=2\left[\left(R_1+h_{x2мi}\right)-\sqrt{\left(R_1+h_{xм2i}\right)^2-x^2}\right] \quad \text{при} \quad x\le x_{отр}, \qquad (19)$$

$$\Delta h_{xп\,i}=2\left\{\left(R_1+h_{xм2i}\right)\left[1-\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{R_1+h_{xм2i}}\right)\right)\right]+\left(x-x_{отр}\right)tg\left(\arcsin\frac{x_{отр}}{R_1+h_{xм2i}}\right)+\right. \qquad (20)$$
$$\left.+\frac{P_x|_{x=x_{отр}}\left(l_{пл}-x_{отр}\right)^4}{10E_{ст}h_{xм2i}^3}\left[4-5\frac{l_{пл}-x}{l_{пл}-x_{отр}}+\frac{\left(l_{пл}-x\right)^5}{\left(l_{пл}-x_{отр}\right)^5}\right]\right\} \qquad при\ x_{отр}<x\le l_{пл},$$

где геометрическая координата точки отрыва $x_{отр}$, а вместе с ней и величина нормальных контактных напряжений в данном сечении $P_{x|x}=x_{отр}$ подлежат дополнительному итерационному определению, исходя из условий $x_{отр}=x_i$ и $P_{x|x}=x_{отр}=P_{xi}$ при соответствии чисто геометрического (0) и упруго-деформационного (0) решений в рамках выделенного элементарного объема.

Здесь следует указать на то, что вследствие наличия функциональной взаимосвязи $l_{пл}(h_x)$ и $h_x(l_{пл})$ итерационному определению подлежит и общая протяженность зоны уплотнения $l_{пл}$. Непосредственно численное определение данной геометрической характеристики осуществляли на основе метода дихотономии [4].

В целом, представленная совокупность аналитических описаний в сочетании с организацией последующего численного интегрирования и определением таких важнейших интегральных показателей исследуемого процесса прокатки, как величина силы P, среднеинтегральное значение нормальных контактных напряжений $p_{ср}$ и моменты прокатки на каждом из рабочих валков M_1, M_2 составили полный алгоритм по одномерному численному математическому моделированию процесса прокатки порошковой ленты.

В качестве примера разработанной математической модели на рис. 3 представлены расчётные зависимости локальных характеристик процесса прокатки порошковой ленты. Видно, что максимальные значения нормальных и нормальных контактных напряжений наблюдается в нейтральном сечении очага деформации, а пластическая деформация материала оболочки начинается в последних сечениях очага деформации, когда нормальные контактные напряжения достигают своего максимального значения. При этом интенсивность увеличения относительной плотности сердечника уменьшается по мере выхода порошковой ленты из валков. Установлено, что с увеличением степени деформации наблюдается увеличение как относительной плотности порошка, так и энергосиловых параметров процесса. Однако при относительном обжатии больше 60 % наблюдается пластическая деформации материала оболочки, причем она может превышать 60 %. Это явление подтверждает допущение о возможности пластической деформации материала оболочки, принятое при разработке математической модели. Этим также объясняется снижение интенсивности роста относительной плотности порошкового материала.

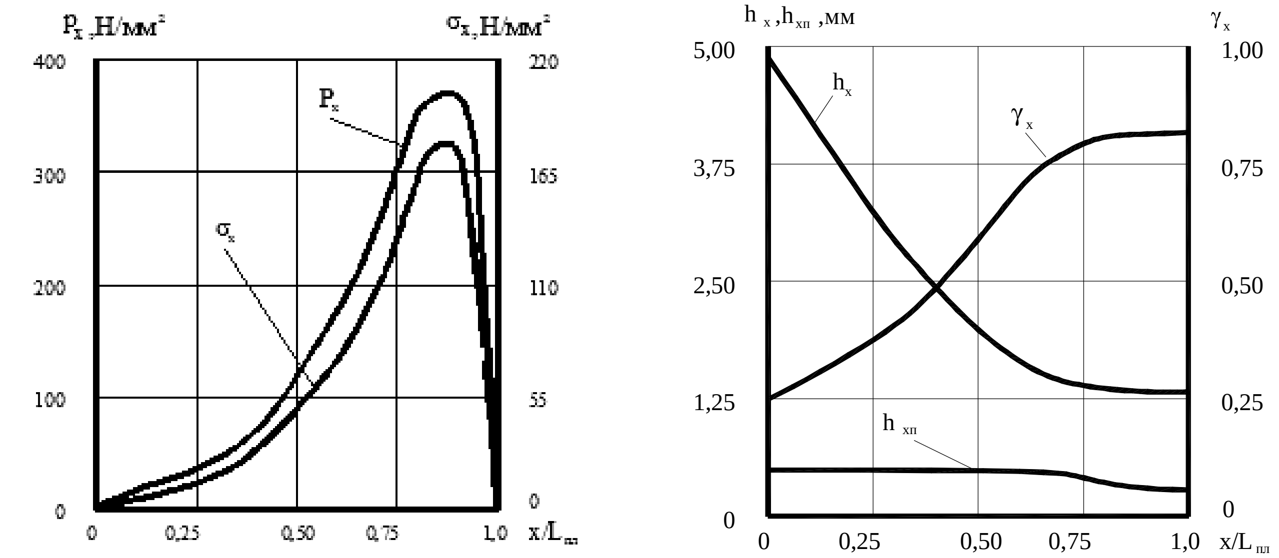

Рис. 3. Расчетные распределения локальных характеристик

ВЫВОДЫ

На основе численного рекуррентного решения конечно-разностной формы условия статического равновесия выделенного элементарного объёма металла разработана одномерная математическая модель процесса изготовления порошковой ленты, особенностью которой является корректный учет законов распределения относительной плотности, механических свойств и геометрических параметров, а также возможность пластической деформации металлической оболочки в очаге деформации. Данная математическая модель и полученные на ее основе программные средства были использованы при разработке технологии электроконтактного плакирования порошковыми лентами изношенных поверхностей деталей энергетических установок. Направление дальнейших исследований – оптимизация состава порошковой ленты, обеспечивающего максимальную износостойкость при работе в условиях абразивного износа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кассов В. Д. Напряженно-деформированное состояние и кинематика для изготовления порошковой ленты / В. Д. Кассов, Э. П. Грибков // Зб. наук. праць УДМТУ. – Миколаїв : УДМТУ, 2001. – № 4 (376). – С. 64–73.*

2. *Кассов В. Д. Теоретический анализ и методика расчёта силовых параметров производства порошковой ленты / В. Д. Кассов, Э. П. Грибков И. В. Воленко // Перспективні технології та обладнання обробки тиском в машинобудуванні та металургії : зб. наук. праць. – Краматорськ : ДДМА. – 2001. – С. 104–109.*

3. *Прогрессивные технологические процессы штамповки деталей из порошков и оборудование / Г. М. Волкогон, А. М. Дмитриев, Е. П. Добряков и др. ; под общ. ред. А. М. Дмитриева, А. Г. Овчинникова. – М. : Машиностроение, 1991. – 320 с.*

4. *Математическое моделирование формирования износостойких покрытий на рабочих поверхностях деталей электроконтактной наплавкой // Захист металургійних машин від поломок : зб. наук. пр. – Маріуполь : ПДТУ, 2006. – № 9. – С. 39–45.*

Кассов В. Д. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ПТМ ДГМА;

Малыгина С. В. – канд. техн. наук, ст. преп. кафедры ПМ ДГМА;

Грибков Э. П. – канд. техн. наук, доц. кафедры АММ ДГМА.

Данилюк В. А. – лаборант кафедры ПТМ ДГМА.

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

E-mail: amm@dgma.donetsk.ua